まとめ (Navier-Stokes方程式に関する研究)

橋本, 英典

数理解析研究所講究録
52巻 1968年 115-120

まとめ

東大 宇宙研　　橋本 英典

開会にあたり本研究会今井代表より、本研究会の目的が特にN－S方程式の定常解について、物理学者の立場から物理的な考察を加え、それを追究することによって数学的な困難を露呈すると共に、更に進んで問題の提示を行うことにあるとの説明があった。流体力学がその初期から古典解析の手法を駆使すると共にその発展を刺戟した循環関係が、さらに進んで、関数解析との連関を新に求めようとしている現段階から見て至言である。

個々の講演の順序はこの講究録に従って、見ていただくことにし、まとめとしては問題点を数え上げて、その将来の解決に期待したい。

数学的問題

といえば定常解の存在と一意性であろう。

、昨年の池部について　高見の明快な解説により解の存在

については、かなり楽観を得ることができよう。たゞ外部問題で、物体を過ぎる後流を伴う直観に近いPR解がレイノルズ数Rの大きい所で未だ確立せず、また存在に示された散逸関数の全空間での積分一定というDの解とどのように結びつくかがはつきりせぬことは気がかりである。一意性に到っては未だしの感が深い。内部問題の解と3次元のPR解が共にレイノルズ数の小さいときに一意である以外は全く不明である。2次元外部問題でのD解がないというラヂエンスカヤの反例が無限遠で一様流となる解でないのは残念である。

これには自由対流と回転円柱の間の流れが或るレイノルズ数を越えると多義的となるという枝分れの現象について高見、桑原の紹介したベルテの数学的研究が関係する。だが前者はN.S方程式固有の問題ではなく、後者は幾何学的に2次元的境界に対する3次元的な流れの出現であり、定常解の多義性（孤立度其の他）とその安定性に対する色々な例の豊富な提出が望まれる。

多義性は物理的な観点から今井によって述べられたように、時間と空間をこめて、何等かの意味で一つの座標（定常流における時間，2次元流に対するz，軸対称流における迴転角）あるいは粘性係数などのパラメタによらない解にあらわれる可能性が多い。そのようなばあい、より高い次元やパラ

メタを含んだ解のスペクトル、それからの極限のもつて行き方、またそれにともなう解の相対的安定性の吟味は将来に残る問題であろう。特にレイノルズ数を無限大にしたときの極限に対し、物体後方に閉じた渦領域のある解を主張するバチエラーに対し、無限に伸びる死水域を提唱する今井はこれに関係して円の境界の一部が一定の角速度で動き、残りの部分が静止しているときの内部流の極限は如何にという問題を提出した。バチエラーの流れは一様流からのずれの運動エネルギーの全空間での積分が無限大とならねばならぬというフインの定理と矛盾するように見えるということが指摘されたが、R→∞での解の解析性の問題も関連するので、事柄は複雑のように見える。特に流線型の物体では、死水のない解も予想されるが、それに関連して形が滑らかでない物体に対し、フインの定理がなりたつかどうかが問題となろう。*

解析的解法

1851年のストークス近似に始まり、N.S方程式のオセーン近似、特異摂動法による低レイノルズ数からの近似、高レイノルズ数からの境界層近似とその改良などが玉田によつ

※柴垣とその協力者(九丸)により滑らかな固定壁にかこまれた非定常流が弱解でなく解析的な解になることが明らかになったとのコメントがあった。数学者の此の方面での活動域の拡張期待したい。

て厂史的に手際よくのべられた。特に平板を過ぎる流れについて、Rが大きいときの流れを、オセーン近似方程式を正しいとして定性的に把握しようとするオセーン模型が提唱され宮城は板が一様流に垂直におかれたばあいの抵抗を積分方程式によりくわしく求めた。最近、角をまわる流れの剥離点の位置が問題にされている折柄、オセーン模型についてもそれを解明することは残された問題であろう。

2つの相交わる平板（交角α）内の2次元流がαがある値より小さいとき、角に向ってつらなる無数の閉じた渦域が生ずるというモファットの解またそれが平面壁に接触しておかれた円柱を過ぎるずれ流れにおいて、具体化されるというシューベルトの解などに相当する場合が数値的には小さいけれども）数値計算のときどのように処理されるべきかという疑点が今井によって提出された。

またモファットの解のくわしい解読が阿曽によって行なわれた。厳密家と実際家との意見の分れる所であるが適当なつなぎの方式が望まれるところである。

<u>数値解法</u>

円柱を過ぎる定常流の差分法による数値解法はすでに川口、高見によってもこゝろみられて居り、無限領域を有限域に写像すると共に i）流れの関数の一様流からのずれψに対す

る境界条件を抵抗係数C_dに比例する漸近解でおきかえるとか ii)計算中途で渦度が予想値と逆の符号をとれば0でおきかえて逐次近似を進める等の方法がとられたが、高石は

i)無限遠で$\psi\equiv 0$とおき*ii)を行なわない、iii)境界上の渦度とその法線微分の差分式を精密化した式でおきかえるなどのこゝろみも加えて新しい計算を行なった。特にi)による違いが$R\sim 100$では小さいが$R\to 0$で大きくなることはC_dが$R\to 0$で大きく$R\to\infty$で0となることからも、うなずける。たゞ物理的には速度の攝動を0とおく方が自然で一般的のように見えるがどうであろう。Rが極端に大きくなったときは従来のあみの目のとり方では不十分であり、円柱面の境界層、背後の渦層に垂直な方向の変化が著しいので、特別な考慮が必要となろう。円柱からはなれたところで放物座標に近くなる適当な変換を用いることが金子によって提唱された。

最後に2つの平行な溝を互に直角に接合した領域の中の流れと更に外側の屈曲部を丸めたばあいが川口、小沢によって論じられた。これはモファットの解、角をまわる流れの剥離に関係して興味をひく。

数値計算については特に誤差の評価法が問題として残され

---

*これは円柱が単独でなく壁が共存するようなばあいの処理法を求める試みである。

た。近似的に得られた解を基礎方程式に代入したときの値自身か、その式を2つに分けたときの各項(乃至はその和との相対値か、また場全体でそれをどうするかなど議論はつきない。

研究会として多数の参会者を得、活潑な議論が展開されたことは喜ばしい限りである。特にまとめについては適当に打切る余裕もなく、問題をもり上げていただいたことは司会者として骨が折れると共に楽しいひとときであった。

筆者の考え違いで講演者および議論について誤った伝え方をしたり、放言(筆?)を行なった点もあることを恐れるが、御教示乃至海容いただければありがたい

最後に *Less is known than is not* (フィン)の現状通り本研究会で露呈された我々の無知を少しでも解決すると共に、更に未知の問題に挑戦するための研究会を将来に期待したいと思う。

なお数研の後藤金英氏には会の運営について一方ならぬお世話になった。終りにあたり謝意を表する次第である。

※ たとえば粘性項と慣性項